

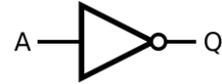
# Circuitos Lógicos

Aula 4

cruz@gta.ufrj.br <http://gta.ufrj.br/~cruz>

# Na última aula

- Portas lógicas
  - NOT
  - AND
  - OR
  - XOR
  - NAND
  - NOR
  - XNOR



# Hoje

- Transformando um problema numa expressão
  - Mintermos
  - Maxtermos
- Implementando expressões booleanas com portas lógicas
- Simplificação de expressões booleanas
  - Comutatividade
  - Associatividade
  - Teorema de De Morgan
  - Equivalência XOR
  - ....



# Avisos



# Avisos

- Lista 1
  - Entrega hoje (20/04)
- Lista 2
  - Entrega daqui a uma semana (27/04)
- Lista 3
  - Entrega daqui a duas semanas (04/05)
- Prática 2
  - Semana que vem, 3<sup>a</sup>-feira (25 de abril)
    - Deve ser lida com antecedência!



# Transformando problema em equação



# Voltando ao exemplo

Um prédio possui um sistema de combate a incêndios contendo um sensor de fumaça (F), um sensor de calor (C) e um de pane elétrica (E). Além disso, possui um sistema de jatos de água (J) e um sistema de alarme (A).

- Em caso de fumaça e calor, os jatos de água devem ser acionados;
- Em caso de calor, o alarme deve ser acionado;
- Em caso de fumaça, o alarme deve ser acionado;
- Em caso de pane elétrica, os jatos de água não podem ser acionados.



F	C	E	J	A
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1



# Forma normal canônica



# Mintermos

- Produto de **todas** as variáveis de um problema
  - Variáveis podem estar na sua forma complementar
  - Variáveis aparecem exatamente uma vez
- Cada mintermo é associado a uma determinada configuração das variáveis
  - Mintermo será obrigatoriamente **1** na configuração
  - Mintermo será obrigatoriamente **0** nas outras



F	C	E	Mintermo
0	0	0	$\bar{F} \cdot \bar{C} \cdot \bar{E}$
0	0	1	$\bar{F} \cdot \bar{C} \cdot E$
0	1	0	$\bar{F} \cdot C \cdot \bar{E}$
0	1	1	$\bar{F} \cdot C \cdot E$
1	0	0	$F \cdot \bar{C} \cdot \bar{E}$
1	0	1	$F \cdot \bar{C} \cdot E$
1	1	0	$F \cdot C \cdot \bar{E}$
1	1	1	$F \cdot C \cdot E$



# Forma normal disjuntiva

- Mintermo vale 1 se e somente se as variáveis estão na configuração associada
- Saída deve ser uma disjunção dos mintermos associados às configurações cuja saída deve ser 1



F	C	E	Mintermo
0	0	0	$\bar{F} \cdot \bar{C} \cdot \bar{E}$
0	0	1	$\bar{F} \cdot \bar{C} \cdot E$
0	1	0	$\bar{F} \cdot C \cdot \bar{E}$
0	1	1	$\bar{F} \cdot C \cdot E$
1	0	0	$F \cdot \bar{C} \cdot \bar{E}$
1	0	1	$F \cdot \bar{C} \cdot E$
1	1	0	$F \cdot C \cdot \bar{E}$
1	1	1	$F \cdot C \cdot E$



# Forma normal disjuntiva

- Mintermo vale 1 se e somente se as variáveis estão na configuração associada
- Saída deve ser uma disjunção dos mintermos associados às configurações cuja saída deve ser 1

Disjunção = *or*  
Conjunção = *and*



F	C	E	Mintermo
0	0	0	$\bar{F} \cdot \bar{C} \cdot \bar{E}$
0	0	1	$\bar{F} \cdot \bar{C} \cdot E$
0	1	0	$\bar{F} \cdot C \cdot \bar{E}$
0	1	1	$\bar{F} \cdot C \cdot E$
1	0	0	$F \cdot \bar{C} \cdot \bar{E}$
1	0	1	$F \cdot \bar{C} \cdot E$
1	1	0	$F \cdot C \cdot \bar{E}$
1	1	1	$F \cdot C \cdot E$



# Forma normal disjuntiva

- Mintermo vale 1 se e somente se as variáveis estão na configuração associada
- Saída deve ser uma disjunção dos mintermos associados às configurações cuja saída deve ser 1

**Saída deve ser um OR dos mintermos pra todas as configurações de variáveis que dão 1**

Disjunção = *or*  
Conjunção = *and*



F	C	E	Mintermo
0	0	0	$\bar{F} \cdot \bar{C} \cdot \bar{E}$
0	0	1	$\bar{F} \cdot \bar{C} \cdot E$
0	1	0	$\bar{F} \cdot C \cdot \bar{E}$
0	1	1	$\bar{F} \cdot C \cdot E$
1	0	0	$F \cdot \bar{C} \cdot \bar{E}$
1	0	1	$F \cdot \bar{C} \cdot E$
1	1	0	$F \cdot C \cdot \bar{E}$
1	1	1	$F \cdot C \cdot E$



# Jatos de água

- Mintermo vale 1 se e somente se as variáveis estão na configuração associada
- Saída deve ser uma disjunção dos mintermos associados às configurações cuja saída deve ser 1

Assim, temos que

$$J = F \cdot C \cdot \bar{E}$$

Disjunção = *or*  
Conjunção = *and*

 F	 C	 E	 J	Mintermo
0	0	0	0	$\bar{F} \cdot \bar{C} \cdot \bar{E}$
0	0	1	0	$\bar{F} \cdot \bar{C} \cdot E$
0	1	0	0	$\bar{F} \cdot C \cdot \bar{E}$
0	1	1	0	$\bar{F} \cdot C \cdot E$
1	0	0	0	$F \cdot \bar{C} \cdot \bar{E}$
1	0	1	0	$F \cdot \bar{C} \cdot E$
1	1	0	1	$F \cdot C \cdot \bar{E}$
1	1	1	0	$F \cdot C \cdot E$



# Alarme



- Alame deve ser acionado em muitos casos:

- $\bar{F} \cdot C \cdot \bar{E}$
- $\bar{F} \cdot C \cdot E$
- $F \cdot \bar{C} \cdot \bar{E}$
- $F \cdot \bar{C} \cdot E$
- $F \cdot C \cdot \bar{E}$
- $F \cdot C \cdot E$

- Expressão fica:

$$A = (\bar{F} \cdot C \cdot \bar{E}) + (\bar{F} \cdot C \cdot E) + (F \cdot \bar{C} \cdot \bar{E}) + (F \cdot \bar{C} \cdot E) + (F \cdot C \cdot \bar{E}) + (F \cdot C \cdot E)$$

Disjunção = or

Conjunção = and

F	C	E	A	Mintermo
0	0	0	0	$\bar{F} \cdot \bar{C} \cdot \bar{E}$
0	0	1	0	$\bar{F} \cdot \bar{C} \cdot E$
0	1	0	1	$\bar{F} \cdot C \cdot \bar{E}$
0	1	1	1	$\bar{F} \cdot C \cdot E$
1	0	0	1	$F \cdot \bar{C} \cdot \bar{E}$
1	0	1	1	$F \cdot \bar{C} \cdot E$
1	1	0	1	$F \cdot C \cdot \bar{E}$
1	1	1	1	$F \cdot C \cdot E$



# Maxtermos

- Soma de **todas** as variáveis de um problema
  - Variáveis podem estar na sua forma complementar
  - Variáveis aparecem exatamente uma vez
- Cada maxtermo é associado a uma determinada configuração das variáveis
  - Maxtermo será obrigatoriamente **0** na configuração
  - Maxtermo será obrigatoriamente **1** nas outras



F	C	E	Maxtermo
0	0	0	$F + C + E$
0	0	1	$F + C + \bar{E}$
0	1	0	$F + \bar{C} + E$
0	1	1	$F + \bar{C} + \bar{E}$
1	0	0	$\bar{F} + C + E$
1	0	1	$\bar{F} + C + \bar{E}$
1	1	0	$\bar{F} + \bar{C} + E$
1	1	1	$\bar{F} + \bar{C} + \bar{E}$



# Forma normal conjuntiva



- Maxtermo vale **0** se e somente se as variáveis estão na configuração associada
- Saída deve ser uma conjunção dos maxtermos associados às configurações cuja saída deve ser **0**

F	C	E	Maxtermo
0	0	0	$F + C + E$
0	0	1	$F + C + \bar{E}$
0	1	0	$F + \bar{C} + E$
0	1	1	$F + \bar{C} + \bar{E}$
1	0	0	$\bar{F} + C + E$
1	0	1	$\bar{F} + C + \bar{E}$
1	1	0	$\bar{F} + \bar{C} + E$
1	1	1	$\bar{F} + \bar{C} + \bar{E}$

Disjunção = *or*  
Conjunção = *and*



# Alarme

- Alarme **não** deve ser acionado nos casos:

- $F + C + E$
- $F + C + \bar{E}$

- Expressão fica:

$$A = (F + C + E) \cdot (F + C + \bar{E})$$

Disjunção = *or*  
Conjunção = *and*



F	C	E	A	Maxtermo
0	0	0	0	$F + C + E$
0	0	1	0	$F + C + \bar{E}$
0	1	0	1	$F + \bar{C} + E$
0	1	1	1	$F + \bar{C} + \bar{E}$
1	0	0	1	$\bar{F} + C + E$
1	0	1	1	$\bar{F} + C + \bar{E}$
1	1	0	1	$\bar{F} + \bar{C} + E$
1	1	1	1	$\bar{F} + \bar{C} + \bar{E}$



# Os jatos de água



- Os jatos **não** devem ser acionados nos casos:

- $F + C + E$
- $F + C + \bar{E}$
- $F + \bar{C} + E$
- $F + \bar{C} + \bar{E}$
- $\bar{F} + C + E$
- $\bar{F} + C + \bar{E}$
- $\bar{F} + \bar{C} + \bar{E}$

- Expressão fica:

$$A = (F + C + E) \cdot (F + C + \bar{E}) \cdot (F + \bar{C} + E) \cdot (\bar{F} + C + E) \cdot (\bar{F} + C + \bar{E}) \cdot (\bar{F} + \bar{C} + \bar{E})$$

F	C	E	J	Maxtermo
0	0	0	0	$F + C + E$
0	0	1	0	$F + C + \bar{E}$
0	1	0	0	$F + \bar{C} + E$
0	1	1	0	$F + \bar{C} + \bar{E}$
1	0	0	0	$\bar{F} + C + E$
1	0	1	0	$\bar{F} + C + \bar{E}$
1	1	0	1	$\bar{F} + \bar{C} + E$
1	1	1	0	$\bar{F} + \bar{C} + \bar{E}$



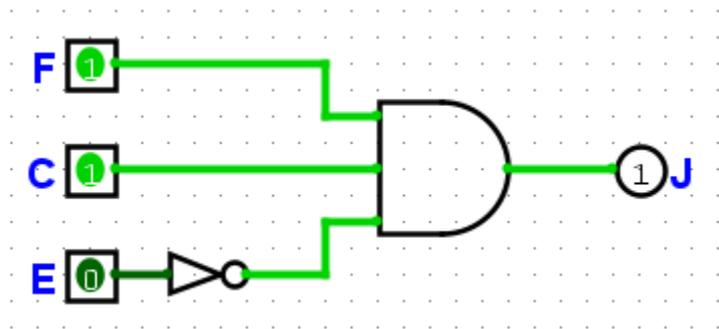
# Transformando equação em circuito



# Os jatos de água (FND)

- Jatos de água devem ser acionados quando

- $J = F \cdot C \cdot \bar{E}$

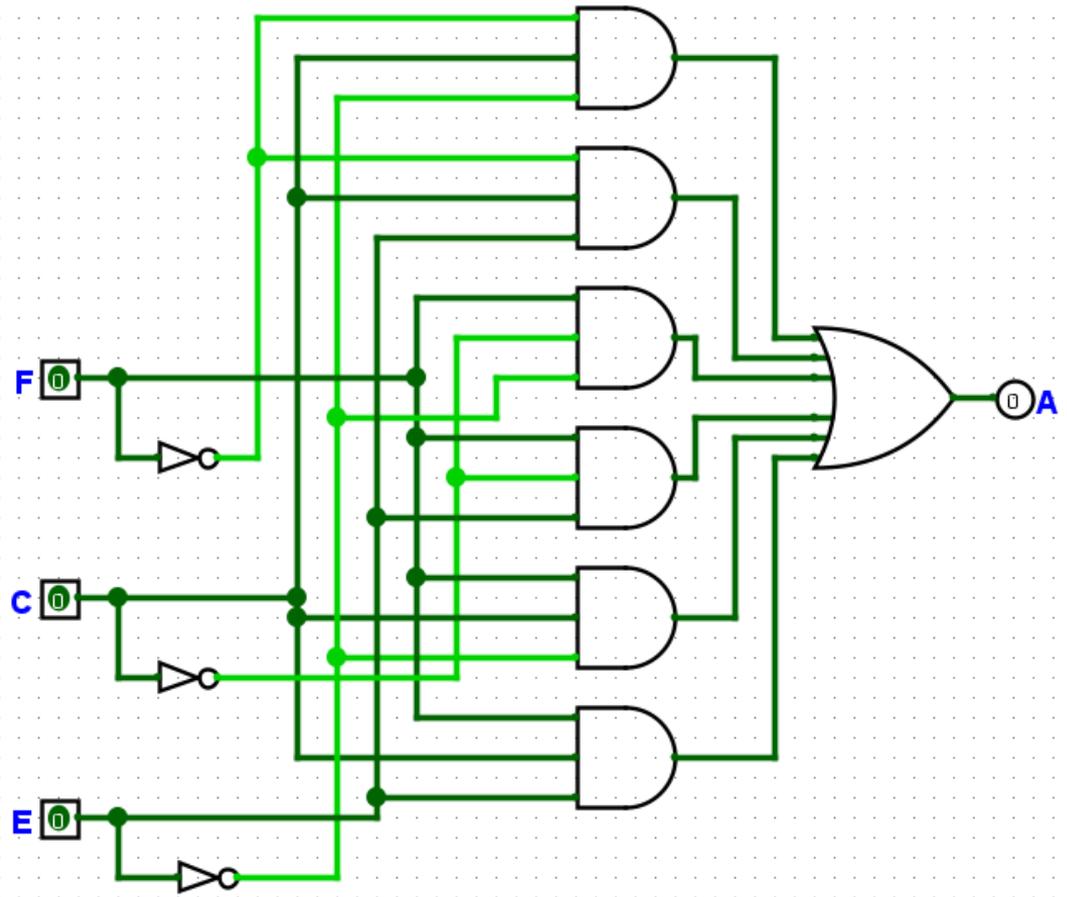


F	C	E	J	A
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1



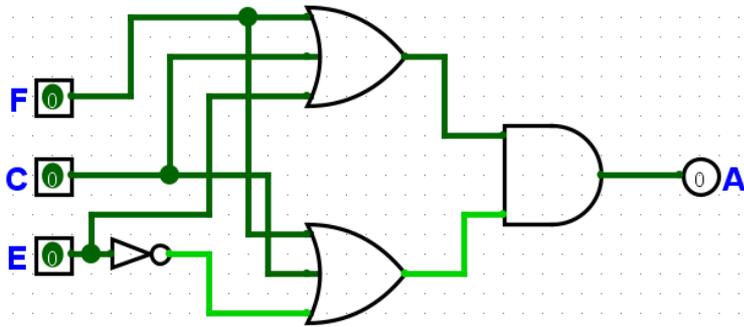
# O alarme (FND)

$$A = (\bar{F} \cdot C \cdot \bar{E}) + (\bar{F} \cdot C \cdot E) + (F \cdot \bar{C} \cdot \bar{E}) + (F \cdot \bar{C} \cdot E) + (F \cdot C \cdot \bar{E}) + (F \cdot C \cdot E)$$



# O alarme (FNC)

$$A = (F + C + E) \cdot (F + C + \bar{E})$$

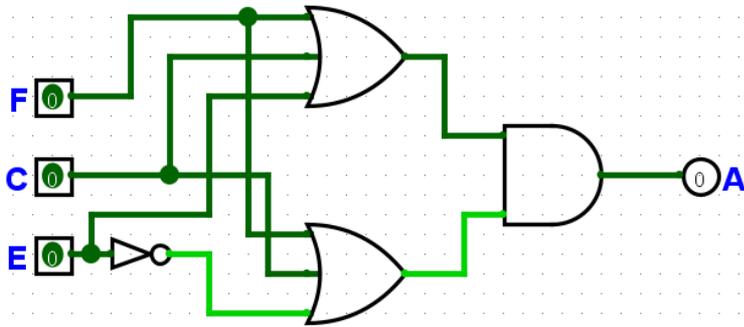


F	C	E	A	Maxtermo
0	0	0	0	$F + C + E$
0	0	1	0	$F + C + \bar{E}$
0	1	0	1	$F + \bar{C} + E$
0	1	1	1	$F + \bar{C} + \bar{E}$
1	0	0	1	$\bar{F} + C + E$
1	0	1	1	$\bar{F} + C + \bar{E}$
1	1	0	1	$\bar{F} + \bar{C} + E$
1	1	1	1	$\bar{F} + \bar{C} + \bar{E}$



# O alarme (FNC)

$$A = (F + C + E) \cdot (F + C + \bar{E})$$



A FND usa 10 portas  
A FNC usa 4



F	C	E	A	Maxtermo
0	0	0	0	$F + C + E$
0	0	1	0	$F + C + \bar{E}$
0	1	0	1	$F + \bar{C} + E$
0	1	1	1	$F + \bar{C} + \bar{E}$
1	0	0	1	$\bar{F} + C + E$
1	0	1	1	$\bar{F} + C + \bar{E}$
1	1	0	1	$\bar{F} + \bar{C} + E$
1	1	1	1	$\bar{F} + \bar{C} + \bar{E}$



# Os jatos de água em FNC???



$$A = (F + C + E) \cdot (F + C + \bar{E}) \cdot (F + \bar{C} + E) \cdot (\bar{F} + C + E) \cdot (\bar{F} + C + \bar{E}) \cdot (\bar{F} + \bar{C} + \bar{E})$$

F	C	E	J	Maxtermo
0	0	0	0	$F + C + E$
0	0	1	0	$F + C + \bar{E}$
0	1	0	0	$F + \bar{C} + E$
0	1	1	0	$F + \bar{C} + \bar{E}$
1	0	0	0	$\bar{F} + C + E$
1	0	1	0	$\bar{F} + C + \bar{E}$
1	1	0	1	$\bar{F} + \bar{C} + E$
1	1	1	0	$\bar{F} + \bar{C} + \bar{E}$



# Os jatos de água em FNC???



$$A = (F + C + E) \cdot (F + C + \bar{E}) \cdot (F + \bar{C} + E) \cdot (\bar{F} + C + E) \cdot (\bar{F} + C + \bar{E}) \cdot (\bar{F} + \bar{C} + \bar{E})$$

Fica como exercício para vocês

F	C	E	J	Maxtermo
0	0	0	0	$F + C + E$
0	0	1	0	$F + C + \bar{E}$
0	1	0	0	$F + \bar{C} + E$
0	1	1	0	$F + \bar{C} + \bar{E}$
1	0	0	0	$\bar{F} + C + E$
1	0	1	0	$\bar{F} + C + \bar{E}$
1	1	0	1	$\bar{F} + \bar{C} + E$
1	1	1	0	$\bar{F} + \bar{C} + \bar{E}$



# Moral da história

- Simplificar é importante
- Reduz o número de portas
  - Reduz custos com circuito
  - Reduz custos com energia
  - Reduz chance de defeitos



# Simplificando as expressões



# Simplificação

- Encontrar expressões equivalentes que possuam menos termos
  - Manipulação algébrica
  - Mapa de Karnaugh

Equivalência quer dizer que expressões possuem as mesmas tabelas verdade  
(ou seja, as mesmas entradas produzem as mesmas saídas)



# Propriedades algébricas importantes

- Operações com **0** e **1**

- $A + 0 = A$
- $A + 1 = 1$
- $A \cdot 0 = 0$
- $A \cdot 1 = A$

- Dupla negativa

- $\bar{\bar{A}} = A$

- Operações com a própria negação

- $A + \bar{A} = 1$
- $A \cdot \bar{A} = 0$



# Propiedades algébricas importantes

## ■ Comutativa

- $A \cdot B = B \cdot A$
- $A + B = B + A$

## ■ Asociativa

- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

## ■ Distributiva

- $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$
- $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$



# Propriedades algébricas importantes

- Usando associatividade e própria negação

- $\bar{A} \cdot B + A \cdot B = B$

- $\bar{A} + B \cdot A + B = B$

- Teorema de De Morgan

- $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$

- $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$

- Equivalência XOR

- $A \oplus B = \bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B}$



# O alarme (FNC)

$$A = (F + C + E) \cdot (F + C + \bar{E})$$

- Chamando  $F + C$  de  $W$

$$A = (W + E) \cdot (W + \bar{E})$$

- Aplicamos associatividade e própria negação

$$A = W$$

- Retornamos com  $F + C$

$$A = F + C$$

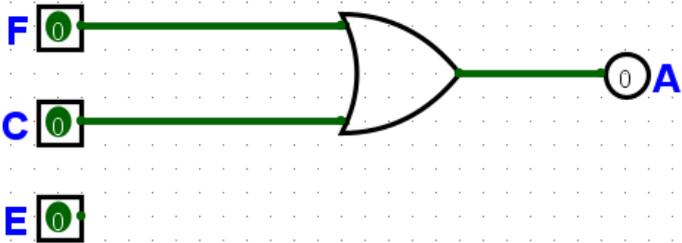


F	C	E	A	Maxtermo
0	0	0	0	$F + C + E$
0	0	1	0	$F + C + \bar{E}$
0	1	0	1	$F + \bar{C} + E$
0	1	1	1	$F + \bar{C} + \bar{E}$
1	0	0	1	$\bar{F} + C + E$
1	0	1	1	$\bar{F} + C + \bar{E}$
1	1	0	1	$\bar{F} + \bar{C} + E$
1	1	1	1	$\bar{F} + \bar{C} + \bar{E}$



# O alarme (FNC)

$$A = F + C$$

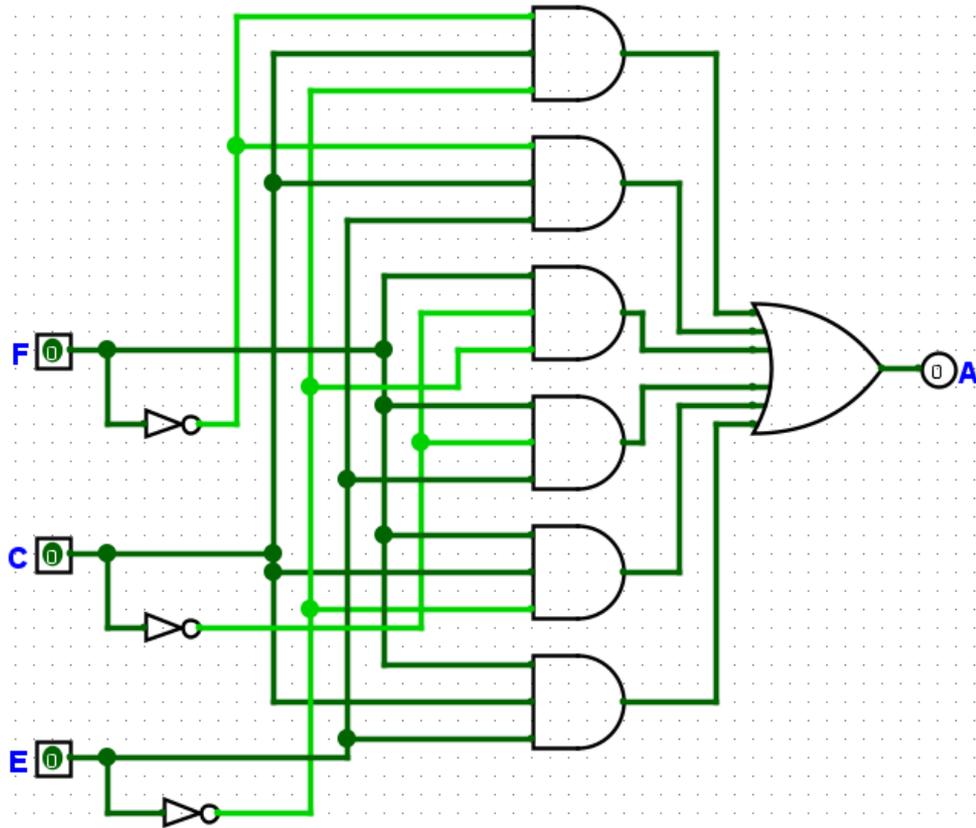


 F	 C	 E	 A	Maxtermo
0	0	0	0	$F + C + E$
0	0	1	0	$F + C + \bar{E}$
0	1	0	1	$F + \bar{C} + E$
0	1	1	1	$F + \bar{C} + \bar{E}$
1	0	0	1	$\bar{F} + C + E$
1	0	1	1	$\bar{F} + C + \bar{E}$
1	1	0	1	$\bar{F} + \bar{C} + E$
1	1	1	1	$\bar{F} + \bar{C} + \bar{E}$



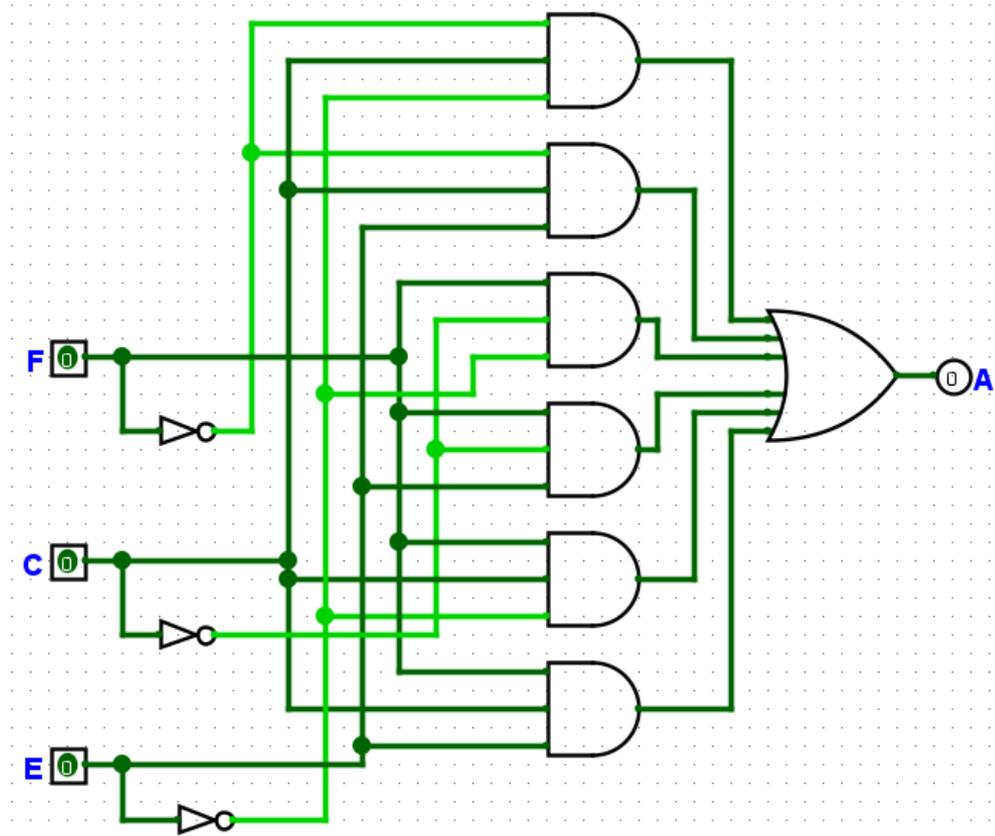
# Questões importantes

- Saída de uma porta ligada na entrada de outra(s)
  - Saída deve ser capaz de ativar a(s) entrada(s) da(s) outra(s)
    - Transferência de energia



# Questões importantes

- Portas lógicas possuem um custo
  - Custo não é só dinheiro
    - Material
    - Energia
    - Espaço
- Redução do número de portas lógicas é importante!
  - Equações devem ser simplificadas

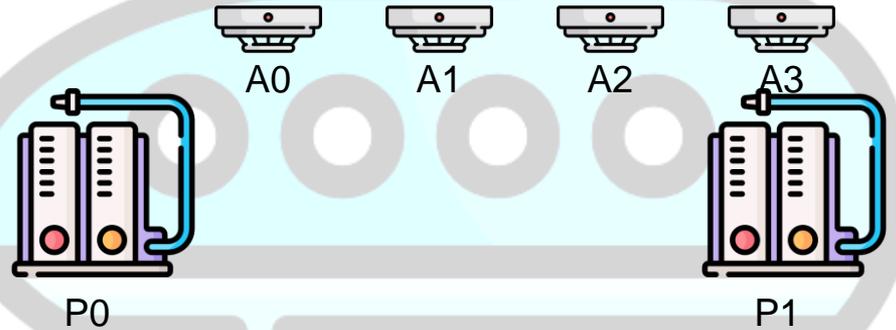


# Exercício



# O submarino

- Um submarino possui dois purificadores de ar
  - P0, na popa (traseira)
  - P1, na proa (dianteira)
- Também possui 4 sensores booleanos
  - A0, A1, A2, A3 – contando da popa para a proa
    - $A_n = 1$  indica que o convés  $n$  precisa de renovação de ar
- Os purificadores devem ser acionados da seguinte forma
  - Ambos devem ser ligados se e somente se todos os convés precisam de renovação de ar
  - Purificador deve ser acionado caso sensores próximos estejam ativos
  - Em caso de empate, acionar P0



Como podemos automatizar os purificadores?



# Porta do elevador

- Elevador possui 4 sensores booleanos
  - A0, A1, A2, A3
    - An indica que elevador está no andar n
  - M indica se o elevador está em movimento ou se preparando para se movimentar.
- Porta deve ser aberta se:
  - Elevador está parado
  - Elevador está em algum andar

Como podemos automatizar o mecanismo de abertura de porta?



# Créditos

Os ícones desta apresentação foram feitos por Freepic e retirados de [www.flaticon.com](http://www.flaticon.com).  
Imagens retiradas da wikipedia, exceto quando informado o contrário.





**GTA / UFRJ**

GRUPO DE TELEINFORMÁTICA E AUTOMAÇÃO

[www.gta.ufrj.br](http://www.gta.ufrj.br)